オーディオ基礎講座補足資料－まとめ

はじめに

この資料は、オーディオ雑誌では説明していないが、オーディオを理解するために、必要な知識のうちごく一部をまとめたものです。これで十分という訳ではありません、高校生位の知識があれば、おおよそ読める程度の内容を記述しています。対象はこれからオーディオを勉強したい人か、勉強しなおしたい人としていますので、数秒で流し読みできる人は、読む必要はありません。

三角関数

三角関数は、平面上の単位円を用いて定義するのが容易である。

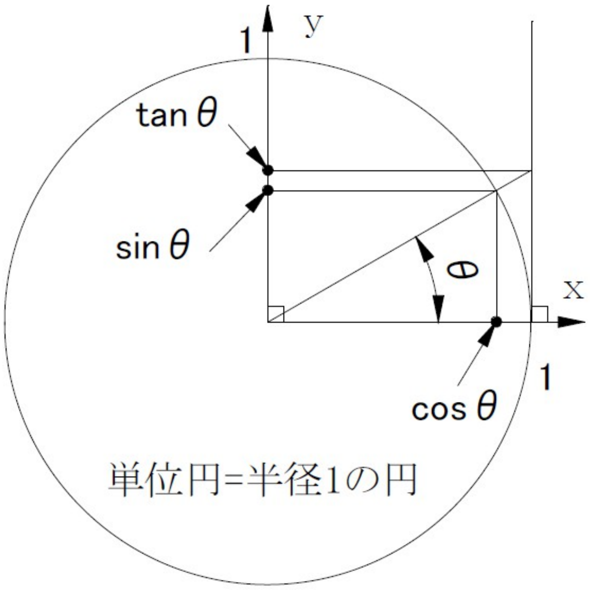

図 *1*　単位円を使った三角関数の定義

平面上の単位円を使用した三角関数の定義

原点を中心とする半径１の円を描く。原点から角度 θ ラジアンの半直線を引く。新たに引いた線と円との交点から y 軸に引いた垂線の y 座標の値が $\sin\theta$、同じく x 軸に引いた垂線の x 座標の値が $\cos\theta$ である。円との交点の先の $x=1$ と交差する点から y 軸に垂線を引いた点の y の値が $\tan\theta$ と定義される。$180°=\pi$ ラジアンなので、*1* 周すると 2π ラジアンになる。*1* 周するごとに元の値になる。これを数式で表すと、

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta \qquad (1)$$

$$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \qquad (2)$$

但し、n は整数とする。$n<0$ のときは反対周りとなるが、同じく *1* 周すると元に戻る。$\tan\theta$ も同様になる。このことは三角関数に特有で重要な性質な性質なので、図を描けば簡単に思い出せる。。

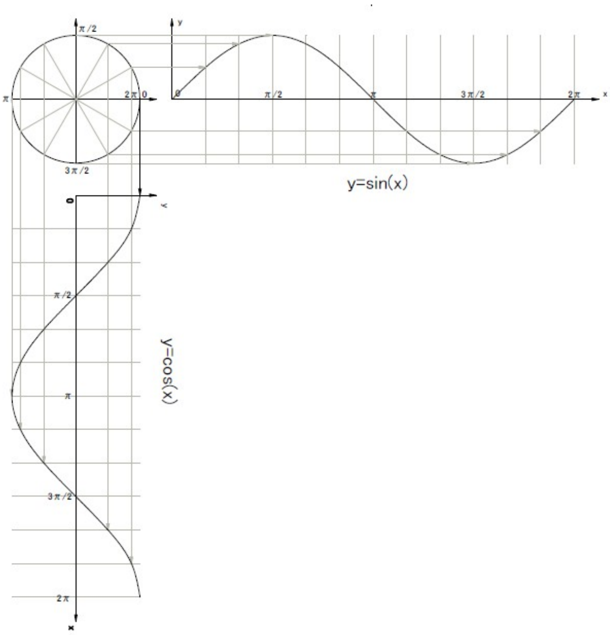

図 *2*　三角関数のグラフ

三角関数のグラフ

三角関数のグラフは、図 *1* で覚えたように、円周から射影して描くことができる。このように描くと、$\cos(x)$は、$\sin(x)$より *1/4* 周進んだだけで形は全く同じであることが分かる。これを数式で書くと

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (3)$$

また、$\cos(x)$は逆に回っても同じであり、$\sin(x)$は逆に回ると正・負が逆転することがわかる。これを式で書くと

$$\cos(-x)=\cos x \qquad (4)$$

$$\sin(-x)=-\sin x \qquad (5)$$

$\cos(x)$のような性質を持つ関数を偶関数、$\sin(x)$のような性質を持つ関数を奇関数という。
偶関数は、y 軸に対称で、奇関数は原点を中心として点対称になる。

図 *1* を見ると、*tanθ* が以下のように表されることも分かる。

$$\tan\theta=\frac{\tan\theta}{1}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{6}$$

また、図 *2* を *tan* に拡張すると、*sin* と同じ、奇関数であることが分かる。すなわち、

$$\tan(-x)=-\tan x \tag{7}$$

また、*tanθ* は、*θ* が直角付近では、∞（または-∞）に近づくことが分かる。
三平方の定理を思い出して図 *1* を見ると、辺の長さがそれぞれ *sinθ*、*cosθ*、*1* の直角三角形が見えるので、以下の関係も分かる。

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \tag{8}$$

これも三角関数の重要な性質である。単位円を使って三角関数を定義すると、これらの重要な関係は、すべて、自然に実感できるようになる。学校ではこれらに関する『公式』教わるが、図 *1* と図 *2* を見れば一目瞭然の関係になっているものが多い。*(3)*式は、*cos(x)*は *sin(x)*よりも位相が *π/2* 進んでいるというようにも表現できる。

波動の表現

波動は三角関数の *sin* を使用して、次式のように表現する。*sin* は *t=0* のときに *0* で始まるので、通常は *sin* を使うことが多い。

$$y=A\sin\omega t \tag{9}$$

ただし、

- A：　振幅（いろいろな物理単位があり得る）
- ω：　角速度、角振動数、または、単に、振動数*[rad/s]*（または単に*[1/s]*）
- t：　時間*[s]*

は、角速度 *ω* で、振幅が *A* の振動を表している。たとえば、振動板を単一振動数で駆動する場合、駆動力は次式のように表現する。

$$F(t)=F_0\sin\omega t$$

ただし、

- F_0 *:* 駆動力の振幅*[N]*

振動数は周波数とは区別する。周波数は、*1* 秒間に何周すすむかを定義するが、角速度は、*1* 周で *2π* 進むので、周波数 *f[Hz]*と角速度　ω　*[rad/s]*との間には以下の関係がある。

$$\omega=2\pi f \tag{10}$$

位相

波動を表す*(9)*式から位相が *φ[rad]*進んでいる状態は次式のように表現する。

$$y=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{11}$$

*(11)*式は、*sin* の*()*内が、*(9)*式よりも常に *φ* だけ大きい。このため、これを、位相が *φ* 進んでいると表現する。逆に、位相が *φ* 遅れているというのも可能で、次式のように表現する。

$$y = A\sin(\omega t - \varphi)$$

上の式は、*(11)*式と同じものである。
同じ振動数の繰り返し（単一周波数の正弦波などと呼ばれる）の場合、$\varphi=\pi$のときは、以下のようになり、これを逆相ともいう。

$$y = A\sin(\omega t + \pi) = -A\sin\omega t \tag{12}$$

$\varphi=2\pi$のときは、以下のように元に戻り、位相差がないのと同じことになる。

$$y = A\sin(\omega t + 2\pi) = A\sin\omega t \tag{13}$$

*(13)*式のように、単一周波数の波動では、位相が2πずれると全く同じになってしまう。『単一周波数』というのは、自然なように見えるが実際には難しいので、*Fourier*級数展開の項でもう少し詳しく触れる。*Fourier*級数は、高校では教わらないが、三角関数を理解するうえで重要な概念なので、高校でも、内容くらいは教えても良いのではないかと思う。

位相について、さらりと書いたが、実際にはそう単純なものではない。
*(11)*式では、位相の単位を角度で扱っているので、これが当然のように見えるが、周波数が変われば、見方が変わる。たとえば、周波数*1kHz*の音源から*100mm*遠ざかった位置ではどうなるか？
音速を*340m/s*とすると、*1kHz*は*1*秒の間に、*1000*サイクルあるので、*1*サイクルあたりは、*0.34m=340mm*である。*1*サイクル分の長さを波長という。そして、*1*波長が位相としては2πに相当する。
*1kHz*の角速度は、$1000/(2\pi)=500/\pi[1/s]$になるので、$\omega=500/\pi$となる。*100mm*は、位相にすると、$100/340\times2\pi=\pi/1.7[rad]$となる。
*100mm*のずれが、*2kHz*の場合には、位相のずれは、$100/170\times2\pi=2\pi/170[rad]$となるので、同じ距離ずれても、周波数が違えば、位相のずれは違ってくる。
こうした性質は、計算して自分で確かめなければピンと来ないと思う。

*Fourier*級数、*Fourier*変換

*Fourier*級数や*Fourier*変換は、高校で教わる内容ではないが、高校で教えないために、三角関数そのものが、単なる受験対策のツールのようになっているように感じる。*Fourier*級数の式そのものは難しいが、内容は覚えておくべきだと思う。

*Fourier*の定理は、厳密でない言い方をすると『全ての波動は、正弦波（余弦波のように位相がずれている場合も含む）の和で表現することができる』という内容である。この定理のお陰で、三角関数を勉強するだけで、全て形の波動を解析することが可能になる。*Fourier*変換は、*Fourier*級数の形をアナログ的に表現しているもので、実質的には同じものである。*Fourier*級数とは、ある周期関数$f(t)$は、次式のように、正弦波と余弦波の和（無限級数）で表されるというものである。*Fourier*級数にはいくつかの表記方法があり、次式はそのなかのひとつである。

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \sin nt + b_n \cos nt\right)$$

各係数の計算方法は、ウェブで検索すればすぐに見つかるし、詳細を論じる必要がないので、ここには書かない。重要な事は、周期関数が、正弦波と余弦波の和で表現できることである。
周波数分析というのも、この*Fourier*の定理を使っている。定理の中に『全ての』という表現があるが、

これには注意が必要である。*Fourier* の定理における全ての波動は、同じものを繰り返すという周期関数を前提としている。したがって、*1* 時間分の波動を *Fourier* 変換したのは、その *1* 時間分が無限に繰り返されているうちの *1* 周期分を変換したことになる。しかし、この時間枠（時間窓という）は、原理的にはいくらでも長くすることができるので、実質的には『全ての波動』を正弦波の和で表すことができることになる。

最近は、*FFT(Fast Fourier Transform*＝高速フーリエ変換*)*ツールが便利に出回っているので、*Fourier* の定理を理解していなくても周波数分析をすることができる。しかしながら、上記のように、*Fourier* の定理が、周期関数を前提にしていることを知らないと、小さな時間窓でも、低い周波数成分まで分析した気になってしまう。低い周波数まで分析しようと思えば、その周波数成分が表現するために時間窓を長くとらなければならないのだが、極めて短い時間窓で分析して、表現できない周波数を評価する人がいるのが実態である。肝心なのは、三角関数を使って全ての波形を表現できることである。

微分形の求め方

微分は公式の暗記に尽きると考える人が、多数派と思う。しかし、これでは、何も役立たない。微分は、ある量の変化に注目したときにその変化を記述するために必要なもので、単なる受験用のお遊びツールではない。微分とは何か、定義に戻って理解することが必要になる。
微分の前にある概念が、『変化の割合』というもので、これは中学校で教わる。

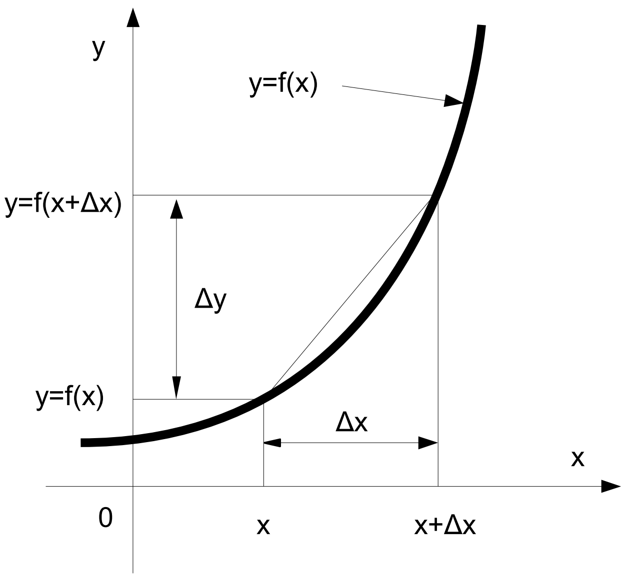

図 *3* 変化の割合

変化の割合とは、関数、 $y=f(x)$ が定義されている場合に、点 x から点 $x+\Delta x$（ただし $\Delta x\neq 0$）に変わったときの y の変化分を x の変化分で割った勾配を指す。Δ はデルタと発音し、変化することを象徴する表現である。Δx は $\Delta\times x$ ではなく、x の変化分という意味で、デルタエックスと読む。同じく Δy も y の変化分を意味している。

この場合の変化の割合は、 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ と表し、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{14}$$

となる。*(14)*式は、x が Δx 変化したときの y の変化を勾配として表現したものである。
図 *3* では、$\Delta x>0$ と正の数になっているが、これは、負の数であってもかまわない。負の数の場合には図が変わるが本質的な意味は変わらない。

このとき、x の変化量を、無限にゼロに近付けた極限値が微分である。これを感覚的に表現すると、その点での接線の傾きという。
関数 $y=f(x)$ の $x=x$ での微分形は、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x) \tag{15}$$

のように表現する。これは、x の無限小の増分に対する y の増分の比を意味する。
微分係数には、プラス側とマイナス側がある。その点でなめらかな関数においては、プラス側とマイナス側の微分係数が一致する。通常は、なめらかな関数を対象にするが、プラス側とマイナス側とで微分係数が一致しない場合には、場合分けしてそれぞれ定義する。たとえば、下のグラフでは矢印を付けた点の右側と左側では微分係数を定義できるが、なめらかになっていないので、右側と左側とでは微分係数が異る。

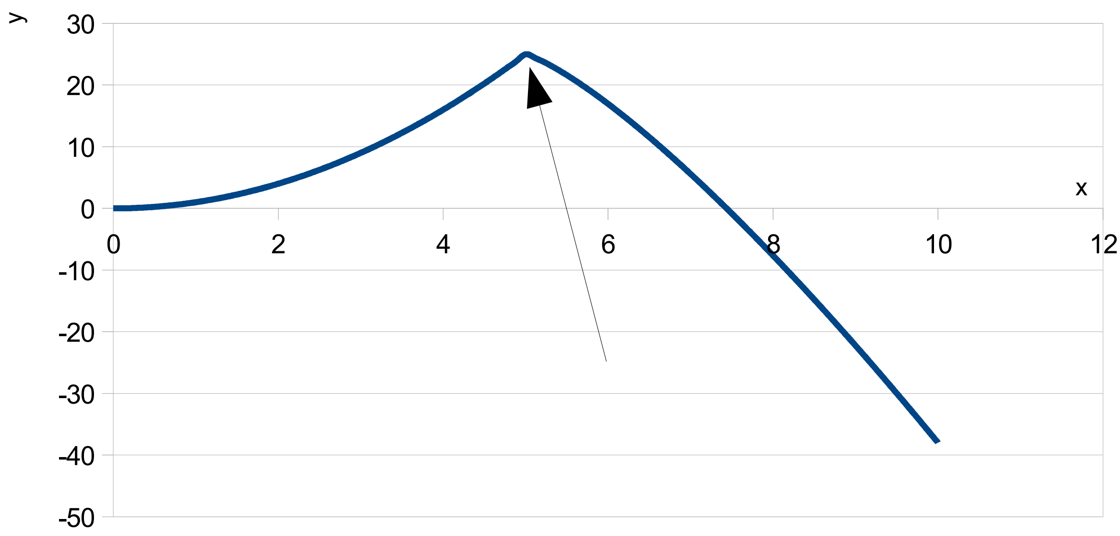

図 *4*　なめらかでない点

なめらかな線上の点では、右側と左側とで微分係数が等しいので、微分係数はひとつに定まる。関数 $y=f(x)$ が x においてなめらかな場合には、その点の微分係数は次式のように定義される。ここでは、簡単のため、Δx の代わりに h を使用しているが、意味は変わらない。なお、下の*(16)*式を見ると、h が正の数であるかのような錯覚を受けるが、負の数であっても構わない。正の数の場合には、右側から近付くことになり、負の数の場合には左から近付くことになる。何も注記がなければ、右側微分係数と左側微分係数とが等しいことになる。

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{16}$$

なめらかでない場合には、右側と左側とを別に明示的に定義し、右側では、次式のように表記して定義する。表記法は左辺、右辺のどちらでも良く、これらは、明示的に点 x に x 軸の右側から近付けることを意味する。

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

同様に、左側から近付ける場合には、次式のように表記する。

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

注目する点においてなめらかな（右側微分係数と左側微分係数が等しい）場合には、その点での微分係数を次式のように定義することも可能である。但し、なめらかであることが明確でない場合には下の*(16)'*式を使用することはできないことに注意する必要がある。

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{16'}$$

*(16)'*式は、右側微分係数と左側微分係数の平均に相当する。

ある点でなめらかという性質以外にもある点で連続であるという性質も数学的には重要で、連続であるためには、

$$\lim_{h\uparrow 0} f(x+h)=\lim_{h\downarrow 0} f(x+h) \tag{17}$$

の要件を満たすことが必要である。

以上が微分の概念であり、これだけ知っていれば、多項式で表される関数の微分係数は簡単に導くことができる。多項式とは、*(18)*式のように表される関数である。

$$y=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+...+a_n x^n \tag{18}$$

ただし、ｎは *1* 以上の整数とする。
ここで、次式の関係を思い出し、

$$(x-a)(x^{n-1}+a x^{n-2}+...+x a^{n-2}+a^{n-1})=x^n-a^n \tag{19}$$

同様に次式が成り立つことを考慮すると

$$(x+h)^n-x^n=h[(x+h)^{n-1}+x(x-h)^{n-2}+x^2(x-h)^{n-3}...+x^{n-2}(x-h)+x^{n-1}] \tag{20}$$

これにより以下の微分形を導くことができる。

$$\frac{d}{dx}x^n=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+x(x-h)^{n-2}+x^2(x-h)^{n-3}...+x^{n-2}(x-h)+x^{n-1}]=n x^{n-1} \tag{21}$$

微分の重要な性質のひとつに線形性が成り立つことがある。線形性とは、次式が成り立つことである。

$$\frac{d}{dx}[a f(x)]=a\frac{d}{dx}f(x) \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x) \tag{23}$$

*(22)*式は、定数を掛けた関数の微分形は、定数を掛ける前の関数の微分形に定数を掛けたものに等しいことを表す。また、*(23)*式は、*2* つ（*3* つ以上でも同じ）の関数の和で表される関数の微分形は、それぞれの関数の微分形の和に等しいことを表す。これらの性質を合わせて線形性が成り立つという。線形性の性質をひとつにまとめると次式のようになる。

$$\frac{d}{dx}[a f(x)+b g(x)]=a\frac{d}{dx}f(x)+b\frac{d}{dx}g(x) \tag{24}$$

*(24)*式の証明は簡単で、まず、*(22)*式をつぎのように証明する。

$$\frac{d}{dx}[a f(x)]=\lim_{h\to 0}[a\frac{f(x+h)-f(x)}{h}]=a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a\frac{d}{dx}f(x)$$

さらに、*(23)*式を以下のように証明する。

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}]=\lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$\lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h \to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

よって、

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

この２つの証明を組み合わせて*(24)*式の証明は完成する（以下省略）。

微分の線形性という性質を使うと、多項式の微分は簡単に求められる。
問題は三角関数の微分である。実は、高校までで教わる範囲内では、三角関数の微分形を正しく導くことはできない。しかし、厳密さを欠くとはいえ、それらしく導くことは可能で、これが学校で教わる方法である。

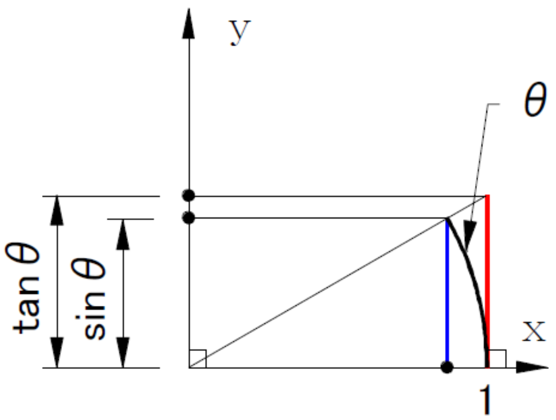

図 *5*　$\sin\theta<\theta<\tan\theta$

三角関数の微分形を求めるためには、
$\sin\theta$、θ、$\tan\theta$ の大小を知る必要がある。
左の図の青色の線の長さが $\sin\theta$、弧の長さが θ、赤い線の長さが $\tan\theta$ である。この図を見るとこれらには、下記の大小関係があるように見える。

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta \tag{25}$$

三角関数の微分には、この大小関係を使う。
$\sin\theta<\theta$　と　$\sin\theta<\tan\theta$　は、簡単に証明できるが、　$\theta<\tan\theta$　は、簡単には証明できない。
しかし、三角関数の微分形を導くためには、
$\sin\theta<\theta<\tan\theta$　を自明なものとして扱う必要がある。

さて、上の図で、θ をゼロに近づけると、$\sin\theta$ と $\tan\theta$ が同じ値に近付くことは自明である。すなわち、

$$\lim_{\theta \to 0}\sin\theta=\lim_{\theta \to 0}\tan\theta \tag{26}$$

そこに、　$\sin\theta<\theta<\tan\theta$　という関係を加えると、以下の関係が分かる。

$$\lim_{\theta \to 0}\sin\theta=\lim_{\theta \to 0}\theta=\lim_{\theta \to 0}\tan\theta \tag{27}$$

このことから、

$$\lim_{\theta \to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \tag{28}$$

*(26)*式から、同様に

$$\lim_{\theta \to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1 \tag{29}$$

も確かめられる。
ただし、θの単位に度数法を使うと、θの値が図*5*のようにならないので、*(26)*～*(29)*式は成立しない。

加法定理

三角関数の微分形を求めるには、上記の*(28)*式の他に、加法定理を使う。

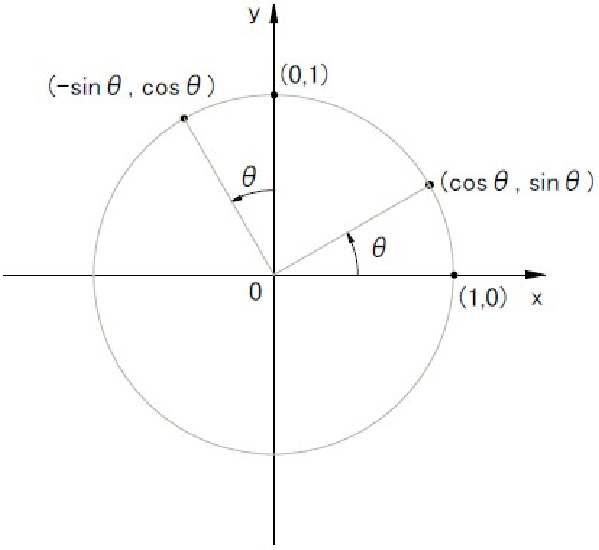

図*6*回転変換行列を見付けるための図

加法定理は、回転変換を*2*回実施することにより求める。回転変換は、行列によって表現する。まず、単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 、 $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ を角度θ回転変換する行列 $\boldsymbol{R}(\theta)$ を見つける。
図*5*から、以下のことが容易に確かめられる。

$$\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} \text{、} \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

このことから、回転変換行列は、*(30)*式の通り定まる。

$$\boldsymbol{R}(\theta)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}(\theta) \quad (30)$$

*(30)*式は以下のとおり証明する。

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \text{ のとき、 } \boldsymbol{x}=x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2$$

したがって、

$$\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{x}=x\,\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{e}_2 \qquad \text{....証明終り。}$$

このことから、回転変換行列を導くためには、単位ベクトルを回転する行列を発見すれば良いだけであることが分かり、図*5*がわかれば、回転変換行列を暗記する必要はない。

加法定理は、角度θ回転する変換を施した後、角度φ回転する合成変換と、角度$\theta+\varphi$回転する変換が等しいことを示せば自動的に計算できる。すなわち、*(31)*式が成立する。

$$\boldsymbol{R}(\theta+\varphi)=\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{R}(\varphi) \quad (31)$$

これを実際に計算してみる。

$$\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{R}(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\end{bmatrix}$$

また、

$$\boldsymbol{R}(\theta+\varphi)=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{bmatrix}$$

これらの、行列の*1*行*1*列要素は、$\cos(\theta+\varphi)$となっており、*2*行*1*列要素が$\sin(\theta+\varphi)$となっているので、

これが合成変換行列の同じ要素と等しいことから、下記の通り、加法定理の基本形が導かれる。

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi \tag{32}$$

$$\sin(\theta+\varphi)=\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi \tag{33}$$

上記の加法定理の基本形は暗記するより、導き方を覚えて都度導くほうが容易である。暗記して少しだけ間違うと全てを失うリスクを伴うが、練習して高速に導けるようになればリスクははるかに小さくなる。
*(32)*式と*(33)*式から以下の関係も当然のものとして導き出される。

$$\cos(\theta-\varphi)=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi \tag{34}$$

$$\sin(\theta-\varphi)=-\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi \tag{35}$$

さらに、以下のように変数を変換する。

$$\begin{cases}\alpha=\theta+\varphi\\ \beta=\theta-\varphi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \varphi=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$$

こうすると、*(32)*式から*(35)*式を使用して以下のとおり加法定理の別の関係も導き出すことができる。

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\theta\cos\varphi=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{36}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\theta\sin\varphi=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{37}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\theta\cos\varphi=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{38}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\theta\sin\varphi=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{39}$$

ついでに、$\varphi=\theta$ の場合を計算すると、*2* 倍角の公式というのも導くことができる。

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta \tag{40}$$

$$\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta \tag{41}$$

*(40)*式、*(41)*式は、公式というほどのものでもなく、加法定理を使えば、*3* 倍角でも *4* 倍角でも *5* 倍角でも同様に導くことができるので、暗記する必要は全くない。

三角関数の微分形

$y=\sin x$ の微分形は、定義にしたがい、計算する。このとき、*(37)*式の関係を使うと次式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2x+\Delta x}{2}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\end{aligned} \tag{42}$$

ここで、*(28)*式から、以下の関係が自明なので

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

*(42)*式の結果、

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{43}$$

と、微分形が導き出される。
以上は式が複雑だが、*(43)*式から、微分係数は、全ての点においてひとつに定まることが示されたので、 $y=\sin x$ には、なめらかでない点がないことがわかる。そこで、*(16)'*式を使うともう少し簡単になる。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x-\Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{2\cos x \sin \Delta x}{2\Delta x} = \cos x$$

これも厳密性を欠くが、同様に $y=\cos x$ の微分形を導いてみる。同じく、*(16)'*式を使い、次式を計算してみる。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x-\Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{-2\sin x\sin\Delta x}{2\Delta x} \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

この式を使うには、関数がすべての点においてなめらかである＝右側微分係数と左側微分係数とが等しい　ことを示さなければならないので、<u>厳密には使用してはならない</u>が、結果だけは正しい。

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{44}$$

以上で *sin* と *cos* の微分形を導くことができた。 $y=\tan x$ の微分形は、定義から導くのは少し面倒である。この関数は、 $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ （n は任意の整数）においてなめらかでないので、*(16)'*式は使用できず*(16)*式から直接計算する。

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$　という関係があるので、*tan* を *sin* と *cos* で書き換えて微分係数を求める定義を適用する。ここに、加法定理を適用することによって、　$y = \tan x$　の微分係数も以下の通り導くことができた。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos h-\cos(x+h)\sin h}{h\cos(x+h)\cos h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\frac{1}{2}[\cos(2x+h)+1]}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\frac{2}{\cos(2x+h)+1}\\ &= \frac{2}{\cos 2x+1}\end{aligned} \tag{45}$$

通常は、このように微分係数を直接導かず、関数の積を微分する公式と合成関数を微分する公式を使用して導くことが多いであろうが、直接導くことがそれほど難しい訳ではない。

微分の公式

微分公式のうち主なものに、積の微分公式と合成関数の微分公式がある。

関数の積の微分公式

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d\,f(x)}{dx} + f(x)\frac{d\,g(x)}{dx} \tag{46}$$

合成関数の微分公式

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d\,g(x)}{dx}\frac{d}{d\,g(x)}f(g(x)) \tag{47}$$

*(46)*式は以下のように証明する。

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]+f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

従って、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]+f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}\\ &= g(x)\frac{d\,f(x)}{dx}+f(x)\frac{d\,g(x)}{dx}\end{aligned}$$

となり、積の微分公式を導くことができた。この公式は、何回か使うと、いつの間にか覚えてしまい。また、ごく当然の式であることがわかる。たとえば、全微分というものがある。全微分は、バスレフ

型の共振周波数を求めるために、気体の状態方程式を変形したときに使用している。それは、次式のようなものである。

$$d(PV)=PdV+VdP \tag{48}$$

全微分は、微分の縦軸側の増分だけに注目したものに相当する。*(48)*式では、*1*辺が P、*1*辺が V の長方形を描き、各辺を少しだけ増やした図を書くと確かめられる。

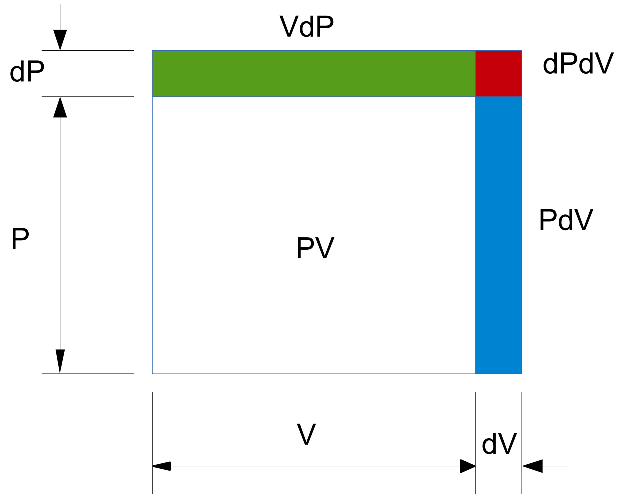

図 *7*　全微分

図 *7* で、PV は、白の長方形の面積を表す。これを V 方向に dV、P 方向に dP だけ僅かに増加させると PV の増加分は、　$PdV+VdP+dPdV$　となる。図では誇張して大きく書いているが、dP とか dV と表記するときは、一般的には、限りなく小さな増加である。このため、$dPdV$ はさらに限りなく小さいため無視することができる。このため、

$$d(PV)=PdV+VdP$$

といいう関係が得られる。これを*(46)*式

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=g(x)\frac{d\,f(x)}{dx}+f(x)\frac{d\,g(x)}{dx}$$

と比べると、同じことを意味していることが分かる。
このような式は、大学で高等教育（古い言い回しだが）を受ければ、当然のように出てくるが、高校では、このような説明をすることは少いかもしれない。
*(46)*式は、公式としてよく使われるが、このように理解すれば、自然に覚えることができる。
合成関数の微分公式*(47)*式の証明は高校で教わる範囲では、三角関数の微分同様困難である。高校で教わる証明は厳密には誤りであるが、数学者になるのでなければ、厳密な証明でなくても良いのではないかと思う。一応以下のように疎明しておく。

$z=g(x)$　とおくと、　$y=f(z)$

このとき、それぞれの増分を、Δ という文字を使って表すと、以下のようになる。

$$\Delta z=\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x \tag{49}$$

$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta z}\Delta z \tag{50}$$

上記は、単なる文字の組合せでそのようにしたのではなく、それぞれの式の右辺の最初の項は、変化の割合を表す。そして、変化の割合に、横軸の増分を掛けたものが、縦軸の増分になるという意味がある（図 *3* 参照）。
この式は、大学で、流体の運動方程式や、伝熱の方程式などを勉強するときに出てくる表現であり、工学を学ぶための基礎となる考え方である。
そこで、*(50)*式の右辺の Δz に*(49)*式を代入すると、以下のようになる。

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$$

上記の式の両辺をΔxで割ると次式が得られる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x} \tag{51}$$

*(51)*式のΔxをゼロに近付けると、その極限値が微分係数 $\frac{dy}{dx}$ となるので、*(47)*式が成り立つことが合理的に推定できる。疎明終り。

微分の最も実用的な使い方

合成関数の微分について、疎明したときに説明したように、微分には、非常に重要な用途がある。その用途とは、以下のようなものである。

なめらかで微分可能な連続関数 $y = f(x)$ において、次式の関係がある。

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \frac{dy}{dx}\Delta x \tag{52}$$

*(52)*式は、xの近傍では、関数のxでの微分係数に、xの増分を掛けた値が、yの増分におおよそ等しいという意味になる。変化に焦点を当てた物理的な関係の微分方程式を導くときには、必ず使用する。ちなみに、これは、*Taylor*級数の第*2*項以上を無視したものに相当する。*Taylor*級数の*2*項以降はあまり使わないが、*(52)*式の関係は、空気のように使うので覚えておくべきである。

おわりに

以上、基礎的な内容を簡単にまとめました。公式のようなものもありますが、絶対に公式集として使用しないでください。全て自分で導いてみて、正しいことを確認できればそのまま使用してください。誤りがありましたら、お知らせ頂ければ幸いです。

以上