ひとつの空気室に複数のダクトを付けた場合の共振周波数計算

この文書は、バスレフのポートを増やしても、共振周波数が増えないことを確認しただけの計算レポートです。
各定数や変数の単位は、すべてメトリックシステムです。
この計算で使用する記号を表1に示します。

表1　記号一覧

記号	詳細
V_0	空気室の容積
a_0	振動板の実効面積
a_1	ダクト1の断面積
a_2	ダクト2の断面積
l_1	ダクト1の有効長
l_2	ダクト2の有効長
m_0	振動板の実効質量
m_1	ダクト1に含まれる空気の実効質量　$m_1=\rho a_1 l_1$
m_2	ダクト2に含まれる空気の実効質量　$m_2=\rho a_2 l_2$
k_t	振動板を箱に付けた場合のバネ定数（ダクトの共振周波数より大きな場合）　$k_t=k_u+k_0$
k_u	スピーカーユニットのバネ定数　$k_u=4\pi^2 f_0^2 m_0$　（ $f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_u}{m_0}}$ ）
k_0	スピーカーユニット振動板の空気バネ定数　$k_0=\frac{\gamma a_0^2 P}{V_0}$　（ダクトの共振周波数より大きな場合）MCAP001J 参照[1]
k_1	ダクト1の空気バネ定数　$k_1=\frac{\gamma a_1^2 P}{V_0}=r_1^2 k_0$
k_2	ダクト2の空気バネ定数　$k_2=\frac{\gamma a_2^2 P}{V_0}=r_2^2 k_0$
r_1	ダクト1の面積比　$r_1=\frac{a_1}{a_0}$
r_2	ダクト2の面積比　$r_2=\frac{a_2}{a_0}$
γ	空気の比熱比　$\gamma=\frac{C_P}{C_V}$　=1.4
P	大気圧
ρ	空気の密度
x_1	ダクト1に含まれる空気塊の変位
x_2	ダクト2に含まれる空気塊の変位

1　http://mcap.webcrow.jp/documents/MCAP001J_background-science.pdf

質点の運動方程式

$$m_0\frac{d^2x_0}{dt^2}+c_0\frac{dx_0}{dt}+k_t x_0+r_1 k_1 x_1+r_2 k_2 x_2=f(t)$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt}+c_1\frac{dx_1}{dt}+k_1 x_1+k_2\frac{r_2}{r_1}x_2+k_t\frac{r_0}{r_1}x_0=0$$

$$m_2\frac{d^2x_1}{dt}+c_2\frac{dx_2}{dt}+k_2 x_2+k_1\frac{r_1}{r_2}x_1+k_t\frac{r_0}{r_2}x_0=0$$

添字：0→振動板、1→ダクト 1、2→ダクト 2

振動板と摩擦損失を無視した場合のダクト部分の質点の運動方程式

今回の目的は、ダクトの共振周波数を確認するだけなので、振動板と摩擦損失を無視します。

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt}+k_1 x_1+k_2\frac{r_2}{r_1}x_2=0$$

$$m_2\frac{d^2x_1}{dt}+k_2 x_2+k_1\frac{r_1}{r_2}x_1=0$$

マトリックス表現では、下記のようになる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & \frac{a_2}{a_1}k_2 \\ \frac{a_1}{a_2}k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

固有値の方程式

$$\begin{vmatrix} k_1-\lambda m_1 & \frac{a_2}{a_1}k_2 \\ \frac{a_1}{a_2}k_1 & k_2-\lambda m_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{よって} \quad (k_1-\lambda m_1)(k_2-\lambda m_2)-k_1k_2=0$$

更に変形する（左辺第 1 項と第 4 項の和がゼロになる）

$$k_1k_2-(m_1k_2+m_2k_1)\lambda+m_1m_2\lambda^2-k_1k_2=0$$

$$m_1m_2\lambda^2-(m_1k_2+m_2k_1)\lambda=0$$

定数項が 0 となり、λ は明らかに 0 ではないため、両辺を λ で除して λ の一次方程式となる。

$$m_1m_2\lambda-(m_1k_2+m_2k_1)=0$$

よって、

$$\lambda=\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_1m_2}=\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_2} \quad .$$

ダクトの共振周波数は、下記のようになる。

$$f_1=f_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_1m_2}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P(a_2l_1+a_1l_2)}{V_0\rho l_1l_2}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho V_0}\left(\frac{a_2}{l_2}+\frac{a_1}{l_1}\right)}$$

以上で、寸法・形状が異るダクトが 2 本の場合にも、共振周波数がひとつに定まることが確認できた。

寸法・形状の異る2本のダクトの単一ダクトへの等価変換モデル

等価モデル

実効バネ定数をk_e、実効等価質量をm_e、実効等価面積をa_e、実効等価長さをl_eとし、モデル計算した。固有値は、等価換算でも不変であるが、混乱を避けるため、変換前の固有値をλ_0等価変換後の固有値をλ_eとした。

ここでは、ダクトの断面積の合計が等しいという前提で、その他の等価寸法を算出した。

	数式	備考
固有値	$\lambda_0=\frac{m_1 k_2+m_2 k_1}{m_1 m_2}=\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_1}{m_1}=\frac{\gamma P}{\rho V_0}\left(\frac{a_2}{l_2}+\frac{a_1}{l_1}\right)$ $\lambda_e=\frac{k_e}{m_e}=\frac{\gamma P(a_1+a_2)^2}{V_0\rho(a_1+a_2)l_e}=\frac{\gamma P(a_1+a_2)}{\rho V_0 l_e}$	$\lambda_e=\lambda_0=\lambda$ $f_D=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho V_0}\left(\frac{a_2}{l_2}+\frac{a_1}{l_1}\right)}$
実効バネ定数	$k_e=\frac{\gamma P a_e^2}{V_0}=\frac{\gamma P(a_1+a_2)^2}{V_0}$	
実効等価面積	$a_e=a_1+a_2$	モデル化の前提
実効等価質量	$m_e=\frac{\rho(a_1+a_2)^2 l_1 l_2}{a_2 l_1+a_1 l_2}$	$m_e=\frac{k_e}{\lambda_e}=\frac{k_e}{\lambda_0}$
実効等価長さ	$l_e=\frac{(a_1+a_2)l_1 l_2}{a_2 l_1+a_1 l_2}$	$l_e=\frac{m_e}{\rho a_e}$

ダクトが3本以上ある場合

とりあえず、上記の等価モデルを元に、ダクトが3本以上の場合にでも共振周波数が増えないことを示します。

まず、ダクトが2本あるとき、これを1本の等価ダクトに変換し、これをa_e、l_eとする。

共振周波数は、下記のようになる。

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m_e}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P a_e}{V_0\rho l_e}}$$

これに、もう1本ダクトを加えると、共振周波数は下記の通りとなる。

$$f_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P(a_3 l_e+a_e l_3)}{V_0\rho l_e l_3}}$$

これは、既に示したとおり、2本のダクトの場合の共振周波数にと同じ形であるため、同様の処理を繰り返してゆけば、ダクトが何本あっても共振周波数がひとつしかないことを示すことができる。これ以上の計算式は面倒なので省略します。

補足－JSP 方式との違いについて

単一箱に複数ダクトを付けても共振周波数がひとつにしかならないことを示したところ、JSP 方式に対して悪い印象を与えるとの指摘があったので、JSP 方式についてコメントします。JSP 方式の公式な解説は、JSP 研究所から入手してください。

JSP 方式は、ダクトが n 本付いていますが、これは、ひとつのダクトを n 本（基本的には 4 本）のダクトに分けたものなので、共振周波数を増やすことを意図した方式ではありません。SP の場合は、下記の通り計算します。

バネ定数

$$k_0=\frac{n^2 \gamma P a^2}{V_0}$$

空気質量

$$m=n\rho a l$$

共振周波数

$$f_D=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n a \gamma P}{V_0 l}}$$

JSP の特長のひとつは、ダクトを放射状に配置することで、対称性を担保することです。
私が上に示している式には、ダクトの位置がモデル化されていません。また、どのダクトも同一の寸法である必要がありません。JSP は、同じダクトを並べたものなので、全く違う議論になります。
JSP 方式のように設計上の共振周波数を変えずに 1 本のダクトを 4 本のダクトに分けると、ダクトの摩擦損失が増えるので、共振点の音圧が下がり、代わりに、その近傍周波数の音圧が上がります。これは、スリット式のダクトと同様の効果です。

JSP は、おそらく、聴感上好ましくなるバスレフの設計法を提唱した方式と思います。これに対し、私が示している式は、物理的な挙動を解析できるだけで、聴感上の効果は考慮していません。従って、JSP 方式は、多自由度バスレフの数式モデルとは異るモデルですので、資料を読む場合には、そうした違いを考慮してください。
私は、JSP 方式については、過去にはコメントしておらず、このコメントは、技術的な違いを説明する以外の目的はありません。

以上