ダブルバスレフエンクロージャの共振周波数計算

2018/11/25

Suzuki, Shigeru

はじめに

この文書は、ダブルバスレフ型エンクロージャの特性周波数の解法について論じる。ここで示す解法は、新しく開発したものではなく、どなたかによって、すでに提案されているものである。ただし、出典を失念してしまった。ここに記載する理論計算は、 http://mcap.webcrow.jp/の技術文書に対応している。

1. 既存公式の確認

長岡は、著書の中で、引用文献を表示せずに公式を紹介している[1]。日本語のウィキペディアによると、公式は、自身で導いたとのことである。

Fig.1 は、ダブルバスレフ型エンクロージャの典型的な構成を示す。Table 1 に記号一覧を示す。これらの記号は、この文書全体に亘り使用する。ただし、従来公式での単位系については不明であり、この段落の中で推定する。

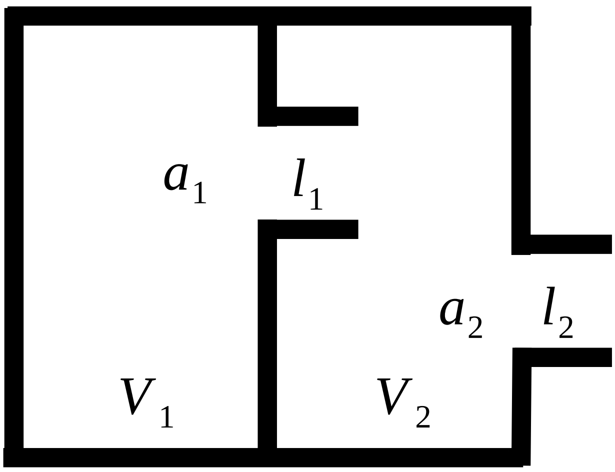

Fig.1 共振モデル

Table 1 記号一覧

記号	詳細	単位	備考
V_1	#1 空気室容積	m^3	
V_2	#2 空気室容積	m^3	
a_1	#2 ダクトの断面積	m^2	
a_2	#2 ダクトの断面積	m^2	
l_1	#1 ダクトの有効長	m	
l_2	#2 ダクトの有効長	m	

長岡が公開している公式を、物理的意味が分かりやすく、また、記号は混乱を避けて修正したものを下記公式(1)と(2)として書き直した。ただし、長岡は、単位系についての記載はない。

$$f_{dl}=160\sqrt{\frac{a_1}{V_1 l_1}}\sqrt{\frac{V_1+V_2}{V_2}} \tag{1}$$

1 長岡鉄男,『長岡鉄男の最新オリジナルスピーカー工作 20』, 音楽の友社, 1976, ISBN4-276-24030-1 C0073 P1550E

$$f_{d2}=160\sqrt{\frac{a_2}{l_2(V_1+V_2)}} \qquad (2)$$

上式は、下記の仮定により成立する。

(a) 高いほうの特性周波数については、２つの空気室が別々に作用する。

(b) 低いほうの特性周波数については、２つの空気室が一体化して作用する。

ダブルバスレフ型エンクロージャの振動モデルは、Fig.2 の、ばね-質量モデルと等価である。

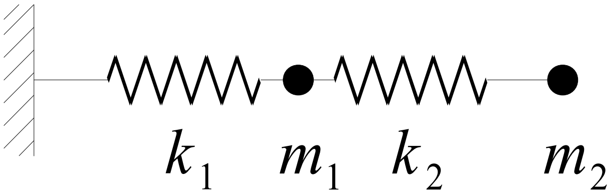

Fig.2 ダブルバスレフ型エンクロージャの等価ばね-質量モデル

これは、理論的に説くことが可能である。理論解法は、後で論じる。
従来公式の条件となる仮定の解釈は容易である。次式のばね-質量系の等価モデルで表される。

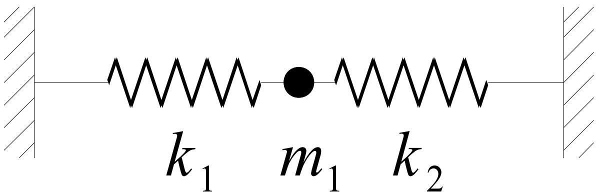

Fig.2a 仮定(a)の等価モデル

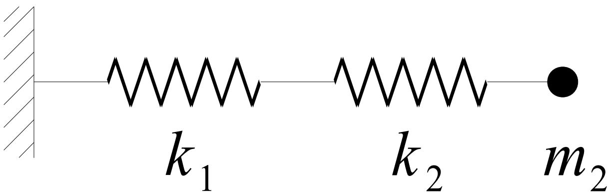

Fig.2b 仮定(b)の等価モデル

ここで、仮定(a)と(b)とは、違うモデルであり、矛盾があることに気付く。

いずれにしても、式(1)と(2)は、(a)と(b)を仮定している。

式(1)および(2)の解釈は簡単ではないので、熱力学に基いた理論式と対比する。

$$f_{d1}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_{2(1)}}{m_1}} \qquad (1)'$$

$$f_{d2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m_2}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_{2(2)}}\right)^{-1}} \qquad (2)'$$

k_2 は、唯一の値ではなく、ダクトの単面積の関数であることに注意が必要である。

m_1 に対しての定数は次式で表される[2]:

$$k_{2(1)} = \frac{\gamma a_1^2 P}{V_2} \tag{3}$$

同様にして m_2 に対しての定数は次式で表される。

$$k_{2(2)} = \frac{\gamma a_2^2 P}{V_2} \tag{4}$$

質量 m_1 と m_2 は、次式で表される。

$$m_1 = \rho a_1 l_1 \tag{5}$$

$$m_2 = \rho a_2 l_2 \tag{6}$$

式(3) - (6)を式(1)'に代入して次式を得る。

$$f_{d1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}\sqrt{\frac{a_1}{V_1 l_1}}\sqrt{\frac{V_1+V_2}{V_2}} \tag{7}$$

同様にして、式(3) - (6)を式(2)'に代入して次式を得る。

$$f_{d2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}\sqrt{\frac{a_2}{l_2(V_1+V_2)}} \tag{8}$$

ただし、

P : 大気圧 (=101,300[Pa])

γ : 空気の比熱比 c_p/c_v (=1.4 ：断熱条件)

ρ : 空気の密度(=1.2[kg/m^3]

他の変数は、Table 1 参照のこと。

Table 1 の通り、SI 単位系を使用すると、定数は次式のようになる。

$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ =54.7（断熱条件）、 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ =46.2（等温条件）

ここで、従来式は、下記の単位系を使用していると仮定する。

V : [l]

l : [cm]

上記の単位を仮定すると、定数は、 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ ではなく、 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10\gamma P}{\rho}}$ となる。

この場合、定数 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10\gamma P}{\rho}}$ は、断熱条件で 173、等温条件で 146 となる。

従来の公式の定数 16 は、173 と 146 との間にあり、断熱条件での理論式を実験値により修正したものと考えられる。

以上で、従来の公式の検証が終了した。次に、理論式による計算について議論する。

---

2 http://mcap.webcrow.jp/documents_jp.html.の文書番号 MCAP001J 参照。

2. 理論計算による公式

ダブルバスレフ型エンクロージャの自由振動の運動方程式は下記のようになる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2\dfrac{a_1^2}{a_2^2} & -k_2\dfrac{a_1}{a_2} \\ -k_2\dfrac{a_1}{a_2} & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

但し、

x　:　ダクト内の空気塊の変位。上の “..” は、時間での二階微分を表す。

他の各変数は、前の段落で定義されている。

上記を式(1)に代入して次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \rho a_1 l_1 & 0 \\ 0 & \rho a_2 l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \gamma P\begin{bmatrix} \dfrac{a_1^2}{V_1}+\dfrac{a_1^2}{V_2} & -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} \\ -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} & \dfrac{a_2^2}{V_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

両辺を ρ で割ると次式となる。

$$\begin{bmatrix} a_1 l_1 & 0 \\ 0 & a_2 l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\gamma P}{\rho}\begin{bmatrix} \dfrac{a_1^2}{V_1}+\dfrac{a_1^2}{V_2} & -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} \\ -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} & \dfrac{a_2^2}{V_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

特性方程式は、次式のようになる。

$$\begin{vmatrix} a_1^2\left(\dfrac{1}{V_1}+\dfrac{1}{V_2}\right)-\dfrac{\rho a_1 l_1 \lambda}{\gamma P} & -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} \\ -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} & \dfrac{a_2^2}{V_2}-\dfrac{\rho a_2 l_2 \lambda}{\gamma P} \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

ここで、簡単のため定数 β を定義する。

$$\beta = \frac{\rho}{\gamma P}$$

式 (11)を β を用いて書き直す。

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_1^2(V_1+V_2)}{V_1 V_2}-\beta a_1 l_1 \lambda & -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} \\ -\dfrac{a_1 a_2}{V_2} & \dfrac{a_2^2}{V_2}-\beta a_2 l_2 \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

式 (12) は次式のようになる。

$$\beta^2 a_1 a_2 l_1 l_2 \lambda^2 - \beta\frac{a_1^2 a_2 l_2(V_1+V_2)+a_1 a_2^2 l_1 V_1}{V_1 V_2}\lambda + \frac{a_1^2 a_2^2(V_1+V_2)}{V_1 V_2^2} - \frac{a_1^2 a_2^2}{V_2^2} = 0 \tag{13}$$

両辺を $a_1 a_2$ で割ると下記のようになる。

$$\beta^2 l_1 l_2 \lambda^2 - \beta \frac{a_1 l_2 (V_1 + V_2) + a_2 l_1 V_1}{V_1 V_2} \lambda + \frac{a_1 a_2}{V_1 V_2} = 0 \tag{14}$$

式 (14)は、下記の通り根の公式で解が求められる。

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$　但し　$a \neq 0$

このとき、下記根の公式が適用される。

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}} \tag{15}$$

定数　a　,　b　,　c　は次式のようになる。

$$a = \beta^2 l_1 l_2$$

$$b = -\beta \frac{a_1 l_2 (V_1 + V_2) + a_2 l_1 V_1}{V_1 V_2}$$

$$c = \frac{a_1 a_2}{V_1 V_2}$$

特性周波数は、固有値を使用して下記のとおり表される。

$$f_D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda} \tag{16}$$

２つの式にまとめると複雑なので、Appendix に計算シートをまとめた。
この文書は、計算シートと共に配布する。

以上

Appendix

ダブルバスレフ共振周波数計算シート(REV00:2018-11-16)

使用方法
[太枠] の枠内に設計値を入力(V1, V2, A1, A2, L1, L2)
[灰色] の枠内には何も書き込まないこと
ダクトの開口補正はモデルに考慮していないので、必要であれば自分で入れてください

計算結果		
共振周波数	補正値	既存近似公式
fd1	**110**	104
fd2	**54**	57

エンクロージャー容積

	[litre]	[m3]	
V1	6.09	0.00609	第1空気室容積
V2	20.4	0.0204	第2空気室容積
V1+V2	26.49	0.02649	全容積

ダクト断面積

	[cm2]	[m2]	
A1	25	0.0025	第1ダクト断面積
A2	30.25	0.003025	第2ダクト断面積

ダクト長さ

	[mm]	[m]	[cm]	
L1	126	0.126	12.6	第1ダクト長さ
L2	90	0.09	9	第2ダクト長さ

γ	比熱比	1.4	[-]
ρ	空気密度	1.2	[kg/m3]
P	大気圧	101300	[Pa]
β	中間変数	8.4614E-06	[m-4 s2]

剛性行列

	column1	column2
raw1	157.496	-43.812
raw2	-43.812	53.012

根の公式の係数

a		8.1190E-13
b		-5.6403E-07
c		6.0872E-02
sqrt(D)	判別式の平方根	3.4705E-07

運動方程式の固有値

λ1	固有値1	5.6108E+05
λ2	固有値2	1.3363E+05

	特性周波数	断熱条件理論値	補正値
fd1	特性周波数1	119.3	110
fd2	特性周波数2	58.2	54