

自由落下の運動方程式解法比較

自由落下の運動方程式を解析的に解く方法と、LibreOffice Calcを使用して、数値的に解く方法とを比較する。

[1] 自由落下の運動方程式の解析的解法

空気抵抗を無視した自由落下の運動方程式は(1)式で表される。但し、重力と逆方向を正とする。このときの座標系(一次元)を、図1に示す。この式の場合、重力加速度は、負の値となるが、式の一貫性を持たせるために、ここでは、あえてこのように定義付けしている。

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg \quad (1)$$

但し、

- m: 落下する物体の質量[kg]
- y: 落下する物体の位置(高さ)[m]
- g: 重力加速度[m/s²](=-9.81)
- t: 時間[s]

(1) 式は、変数tについて2回積分することによって、解析的に解くことができる。
まず、出題の意図より、質量 $m > 0$ と仮定し、(1)式の両辺を m で除す。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g \quad (2)$$

(2) 式は、変数tについて2回積分する。

$$\int \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = gt + C_1 \quad (3)$$

$$\int \frac{dy}{dt} = y = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \quad (4)$$

定数 C_1 と C_2 は、初期条件によって決定する。

ここで、 $t=0$ [s]のときの高さを h [m]、 $t=0$ [s]のときの速度(初速度)を v_0 [m/s]とすると、(3)式と(4)式から、

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \\ C_2 = h \end{cases}$$

よって、(4) 式は、(5)式のようになる。

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h \quad (5)$$

(5) 式により、任意の時刻における物体の位置を直接計算することができる。

[2] LibreOffice Calcを用いた数値解法

(5)式から任意の時刻における物体の位置を直接計算できように、数値解法を用いれば、(2)式から物体の位置を計算することができる。

まず、時刻 t における、位置と初速度を設定する。ここでは、位置 $y(0)=h$ 、初速度 $v(0)=0$ である。

ここで、微小時間 Δt 後の速度と、位置を計算する。

$$v(0+\Delta t) = v_0 + g\Delta t \quad (6)$$

$$y(0+\Delta t) = h + \frac{\bar{v}\Delta t}{2} \quad (7)$$

但し、 v の上に付けた横棒は、その時間(Δt 秒間)の平均値とする。

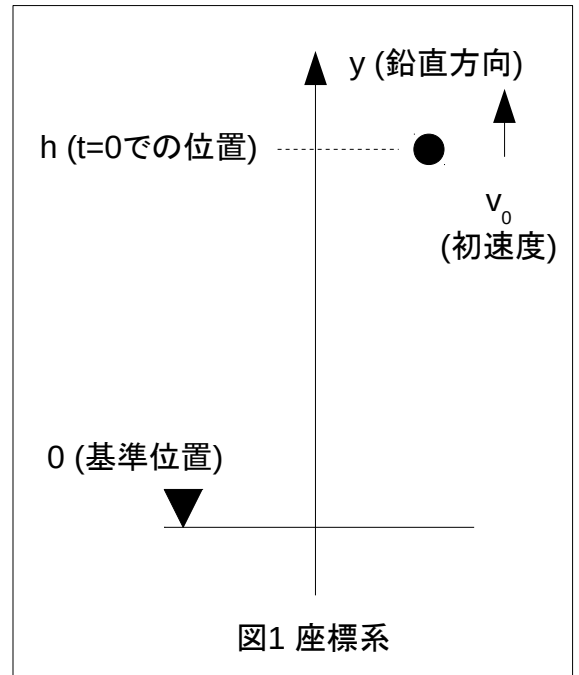


図1 座標系

次に、さらに微小時間 Δt 秒後の速度と高さを計算する。

$$v(\Delta t + \Delta t) = v(\Delta t) + g \Delta t \quad (8)$$

$$y(\Delta t + \Delta t) = h(\Delta t) + \frac{\bar{v} \Delta t}{2} \quad (9)$$

上記の計算を繰り返せば、任意の時刻(但し、離散値)での物体の位置を計算することができる。時間の刻み幅を微小値 Δt とし、速度 v_j と位置 y_j を漸化式で表す。また、 $t = j\Delta t$ とする。

$$v_{j+1} = v_j + g \Delta t \quad (10)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{(v_j + v_{j+1}) \Delta t}{2} \quad (11)$$

$j=1$ から順に(10)式、(11)式を繰り返すことにより、物体の高さを経時的に計算することができる。

これらの式を、Calcシートに記述し、セルをドラッグ&ドロップすることで、順次計算が可能になる。下記にCalcの計算式を示す。

値を記入する

	A	B	C	D	E
1	time resolution[s]	0.05	Δt		
2	initial position[m]	200	C2		
3	initial velocity[m/s]	0	C1		
4	gravity acceleration[m/s ²]	-9.81	g		
5					
6		position		velocity	
7	time	exact	numerical	exact	numerical
8	0.00	200	200	0	0
9	0.05	199.9877375	199.9877375	-0.4905	-0.4905

$=A8+\$B\1
 $=0.5*\$B\$4*A9^2+B\$8+\$B\$3*A9$
 $=C8+(E9+E8)*\$B\$1/2$
 $=\$B\$4*A9+D\$8$
 $=\$B\$1*\$B\$4+E8$

最初の行(第8行:A8~E8)に初期値を記入し、次の行(第9行:A9~E9)に計算式を記入する。A9~E9をハイライト(選択)し、E9セルの右下にカーソルを合わせ、現れた十字マークをクリックし適当な行までドラッグ&ドロップすることにより、計算を実行できる。

B,D列(exact)は、直接解法による計算値、C,E列(numerical)は、数値解法による計算値を示す。直接解法では、時間の関数として計算するので、その時刻においても誤差はコンピュータの処理誤差だけであるが、数値解法においては、時刻 Δt 以降順次計算するので、誤差が蓄積される。この場合、100ステップまで計算したが、小数点以下7桁までは、誤差は無かった。